

## 7. BÖLÜM BARA ADMİTANS VE BARA EMPEDANS MATRİSLERİ

### 7.1. Giriş

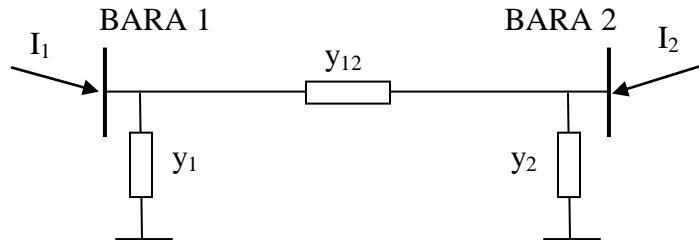
İletim sistemlerinin analizlerinde, bara sayısı arttıkça artan karmaşıklıkları yenmek için sistemin matematiksel modellenmesinde kolaylık getirici bazı yöntemler geliştirilmiştir. Bunlarda biri de iki-kapılı devrelerden hareketle geliştirilen çok-uçlu eleman modelidir (veya çok-giriş çok çıkışlı devre modeli).

Bu modellerde generatörler ve yükler devrenin uç düşümlerine (yani iletim sisteminin baralarına) akım enjekte eden (yonları de göz önüne alınarak) akım kaynakları olarak düşünülebilir. Buradan hareketle devrenin iç bağlantıları yardımıyla akım-gerilim (uç) denklemleri düzenlenebilir.

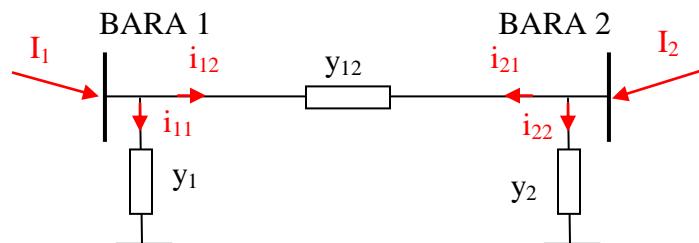
Bu amaçla devrenin bağlantı şeması üzerinden giderek bara akımları–bara gerilimleri bağıntılarını kurmada kullanılmak üzere “bara bağlantı matrisleri” kurulabilir.

### 7.2. Bara Admitans Matrisi

Örnek; iki baralı bir sistem göz önüne alınarak,



**Şekil 7.1. İki baralı örnek sistem,  $y_{12}$  hattın seri admitansı,  $y_1$  ve  $y_2$  şönt admitanslar**



**Şekil 7.2. Örnek sistemde akım dağılımları**

Şekil 7.2 ye göre akım denklemleri yazılırsa;

$I_1 = i_{11} + i_{12}$	
$I_2 = i_{22} + i_{21}$	(7.1)

$I_1 = y_1 \cdot V_1 + y_{12} \cdot (V_1 - V_2)$	
$I_2 = y_2 \cdot V_2 + y_{12} \cdot (V_2 - V_1)$	(7.2)

$I_1 = (y_1 + y_{12}) \cdot V_1 - y_{12} \cdot V_2$	
$I_2 = -y_{12} \cdot V_2 + (y_2 + y_{12}) \cdot V_2$	(7.3)

7.3 ifadesi matris formunda yazılmıştır

$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1 + y_{12}) & -y_{12} \\ -y_{12} & (y_2 + y_{12}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$	(7.4)
--	-------

aşağıdaki yapılandırmaya göre yeniden düzenlenir ise;

$Y_{11} = (y_1 + y_{12})$ $Y_{22} = (y_2 + y_{12})$ $Y_{12} = -y_{12}$ $Y_{21} = -y_{12}$	(7.5)
--	-------

$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$	(7.6)
--	-------

7.6 ifadesi elde edilir.

Bu formun genelleştirilmesi durumunda ifade

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1i} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2i} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{i1} & Y_{i2} & \cdots & Y_{ii} & \cdots & Y_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{Ni} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

şeklinde yazılabilir. (7.7) ifadesi kapalı formda;

$$[I_{\text{BARA}}]_N = [Y_{\text{BARA}}]_{NxN} \cdot [V_{\text{BARA}}]_N \quad (7.8)$$

şeklinde yazılabilir.

$$[Y_{\text{BARA}}]_{NxN} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1i} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2i} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{i1} & Y_{i2} & \cdots & Y_{ii} & \cdots & Y_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{Ni} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

7.8. ifadesindeki  $[Y_{\text{BARA}}]_{NxN}$  N Baralı bir iletim sisteminin "**Bara Admitans Matrisi**" dir.

Bara admitans matrisi, N baralı bir sistem için, devrenin akım denklemlerini kurup düzenlemeye gerek kalmadan doğrudan devre üzerinden basit bir algoritma kullanılarak kurulabilir:

### 7.3. **Y<sub>BARA</sub>** Doğrudan Kurulum Algoritması

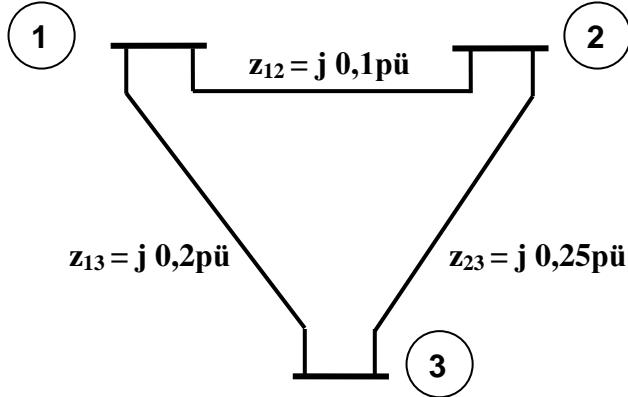
#### Köşegen Elemanlar (Y<sub>ii</sub>)

- i. köşegen elemana ( i. Baraya ) degen tüm admitansların toplamı

#### Köşegen Dışı Elemanlar (Y<sub>ij</sub>)

- i. elemanla j. eleman arasında admitans varsa  $Y_{ij} = -y_{ij}$
- i. elemanla j. eleman arasında admitans yoksa  $Y_{ij} = 0$

### Örnek 7.1.



$$y_{12} = \frac{1}{z_{12}} = \frac{1}{j0.10} = -j10\text{pu}$$

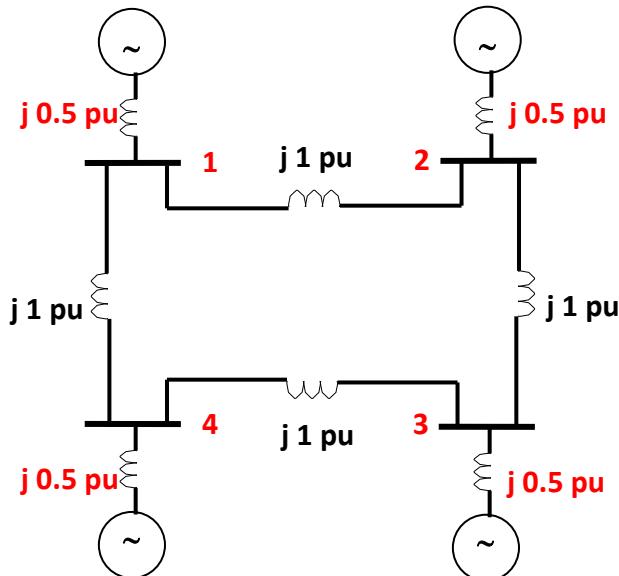
$$y_{13} = \frac{1}{z_{13}} = \frac{1}{j0.20} = -j5\text{pu}$$

$$y_{23} = \frac{1}{z_{23}} = \frac{1}{j0.25} = -j4\text{pu}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} 10+5 & -10 & -5 \\ -10 & 10+4 & -4 \\ -5 & -4 & 5+4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$[Y_{\text{BARA}}] = -j \begin{bmatrix} 15 & -10 & -5 \\ -10 & 14 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \end{bmatrix} \text{ pu}$$

### Örnek 7.2.



Generatör admitansları

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{j0.5} = -j2\text{pu}$$

Hat admitansları

$$y_{12} = y_{23} = y_{34} = y_{14} = \frac{1}{z_{12}} = \frac{1}{j1.0} = -j1.0\text{pu}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} 2+1+1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2+1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2+1+1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2+1+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

$$[Y_{\text{BARA}}]_{4 \times 4} = -j \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ pu}$$

#### 7.4. Bara Azaltma ( $Y_{BARA}$ İndirgeme)

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_R \\ \bar{I}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_A & \bar{Y}_B \\ \bar{Y}_C & \bar{Y}_D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_R \\ \bar{V}_E \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_E = \emptyset$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_R \\ \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_A & \bar{Y}_B \\ \bar{Y}_C & \bar{Y}_D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_R \\ \bar{V}_E \end{bmatrix}$$

$$\emptyset = \bar{Y}_C \bar{V}_R + \bar{Y}_D \bar{V}_E$$

$$\bar{V}_E = -\bar{Y}_D^{-1} \bar{Y}_C \bar{V}_R$$

$$\bar{I}_R = \bar{Y}_A \bar{V}_R + \bar{Y}_B \bar{V}_E$$

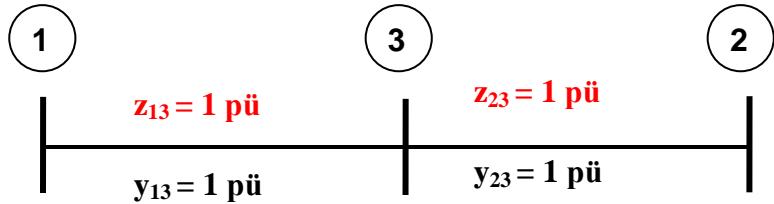
$$\bar{I}_R = \bar{Y}_A \cdot \bar{V}_R - \bar{Y}_B \bar{Y}_D^{-1} \bar{Y}_C \cdot \bar{V}_R$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_A - \bar{Y}_B \bar{Y}_D^{-1} \bar{Y}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_R \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

$$[Y_{BARA}]_{INDIRGENMIS} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_A - \bar{Y}_B \bar{Y}_D^{-1} \bar{Y}_C \end{bmatrix}$$

(7.10)

#### Örnek 7.3.



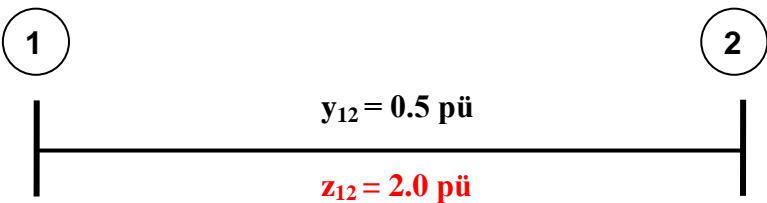
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & +2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$[Y_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [Y_B] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [Y_C] = [-1 \quad -1] \quad [Y_D] = [2]$$

$$[Y_{BAra}]_{INDİRGENMİŞ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [2]^{-1} \cdot [-1 \quad -1]$$

$$[Y_{BAra}]_{INDİRGENMİŞ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[Y_{BAra}]_{2X2} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad y_{12} = 0.5 \text{ pü} \quad z_{12} = \frac{1}{y_{12}} = \frac{1}{0.5} = 2.0 \text{ pü}$$



## 7.5. Bara Empedans Matrisi

Tanım olarak “Bara Empedans Matrisi”; Bara Admitans Matrisinin tersidir.

$$[Z_{BARA}]_{NxN} = [Y_{BARA}]_{NxN}^{-1} \quad (7.11)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1i} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2i} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{ii} & Z_{i2} & \cdots & Z_{ii} & \cdots & v_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{Ni} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

şeklinde yazılabilir. (7.12) ifadesi kapalı formda;

$$[V_{BARA}]_N = [Z_{BARA}]_{NxN} \cdot [I_{BARA}]_N \quad (7.13)$$

**Örnek 7.4.**

Örnek 7.2. de bulunan  $[Y_{\text{BARA}}]_{4 \times 4}$  göz önüne alınarak;

$$[Z_{\text{BARA}}]_{4 \times 4} = [Y_{\text{BARA}}]_{4 \times 4}^{-1} = \begin{bmatrix} -j4 & +j1 & 0 & +j1 \\ +j1 & -j4 & +j1 & 0 \\ 0 & +j1 & -j4 & +j1 \\ +j1 & 0 & +j1 & -j4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[Z_{\text{BARA}}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} j0.2917 & j0.0833 & j0.0417 & j0.0833 \\ j0.0833 & j0.2917 & j0.0833 & j0.0417 \\ j0.0417 & j0.0833 & j0.2917 & j0.0833 \\ j0.0833 & j0.0417 & j0.0833 & j0.2917 \end{bmatrix}$$

bulunur.